EXAMEN DE PROBABILIDADES Y ESTADÍSTICA I
UNIDADES DIDÁCTICAS 2 Y 3. NOVIEMBRE 2013

Realizar las preguntas en hojas separadas, indicando explícitamente todas las fórmulas que se utilicen.

Tanto el alumno que copie como el que se deje copiar no podrá examinarse hasta el próximo curso.

Duración: 1 hora.
Puntuación: Todas las preguntas tienen la misma puntuación.

1. El precio de cierta fruta en el mercado de mi barrio sigue una distribución Normal de media 6 euros y desviación típica 1.5 euros. El frutero solamente me la ofrece si su precio es inferior a 6.5 euros. Si hoy me la ha ofrecido, ¿cuál es la probabilidad de que su precio esté entre 5 y 6 euros?

2. Puedo volver a casa del trabajo tomando dos autobuses A ó B. Las paradas de cada línea de autobuses son variables aleatorias ya que no siempre para en todas. Tomo el A el 30 % de las veces y el B el resto. Supongamos que las paradas que hace el autobús de la línea A siguen una distribución de Poisson de media 4 paradas por trayecto y las del autobús B una distribución de Poisson de media 6 paradas por trayecto:

   a) ¿Cuál es la probabilidad de que el autobús en el que vuelvo a casa haya hecho exactamente 3 paradas?

   b) Si el autobús hizo 3 paradas, ¿cuál es la probabilidad de que la línea que cogiera fuera la B?

SOLUCIONES DEL EXAMEN DE PROBABILIDADES Y ESTADÍSTICA I UNIDADES DIDÁCTICAS 2 Y 3. NOVIEMBRE 2013

1. Sea la variable aleatoria $X =$*precio de la fruta* $\sim N(6, 1.5)$. El frutero me ofrece la fruta si $X < 6.5$. Como hoy me la ha ofrecido, sabemos que $X < 6.5$, por lo que se pide la probabilidad condicionada:

$$
\begin{aligned}
P(5 < X < 6|X < 6.5) &= \frac{P([5 < X < 6] \cap [X < 6.5])}{P(X < 6.5)} = \\
&= \frac{P(5 < X < 6)}{P(X < 6.5)} = \\
&= \frac{P\left(\frac{5-6}{1.5} < \frac{X-6}{1.5} < \frac{6-6}{1.5}\right)}{P\left(\frac{6.5-6}{1.5}\right)} = \\
&= \frac{P(-0.66 < Z < 0)}{P(Z < 0.33)} = \frac{P(Z < 0) - P(Z - 0.66)}{P(Z < 0.33)} = \\
&= \frac{F(0) - (1 - F(0.66))}{F(0.33)} = \\
&= \frac{0.5 - (1 - 0.7454)}{0.6293} = \frac{0.2454}{0.6293} = 0.389995
\end{aligned}
$$

donde $Z \sim N(0, 1)$ y F es su función de distribución.

2. Sea $X =$*número de paradas en el trayecto de vuelta a casa*. Nos dicen que:

$$X_A = X|A \sim \mathcal{P}(4)$$

$$X_B = X|B \sim \mathcal{P}(6)$$

Nos piden:

a) $P(X = 3)$. Lo vamos a calcular usando el Teorema de la probabilidad total:

$$P(X = 3) = P(X = 3|A) \cdot P(A) + P(X = 3|B) \cdot P(B)$$

Nos dicen $P(A) = 0.3$ y $P(B) = 0.7$. Calculamos las probabilidades condicionadas que necesitamos:

$$P(X = 3|A) = e^{-4}\frac{4^3}{3!} = 0.195$$

$$P(X = 3|B) = e^{-6}\frac{6^3}{3!} = 0.089$$

Sustituyendo, se tiene:

$$P(X = 3) = (0.195) \cdot (0.3) + (0.089) \cdot (0.7) = 0.0585 + 0.0623 = 0.1208$$

b) Nos piden $P(B|X = 3)$. Usamos el Teorema de Bayes:

$$P(B|X = 3) = \frac{P(X = 3|B) \cdot P(B)}{P(X = 3)} = \frac{(0.089) \cdot (0.7)}{0.1208} = \frac{0.0623}{0.1208} = 0.515$$